E.N.S.I. de PHYSIQUE option M session 1987

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Dans tout ce problème, K désigne un sous-corps du corps C des nombres complexes.

On note K[X] l'algèbre des polynômes à coefficients dans K, et K(X) le corps des fractions rationnelles à coefficients dans K. On désigne par $K^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites $u = (u_n)_{n \geqslant 0}$ d'éléments de K.

Un polynôme P non nul est dit normalisé si le coefficient de son terme de plus haut degré est égal à 1.

On note T l'endomorphisme de $K^{\mathbb{N}}$ qui à toute suite $u = (u_n)_{n \geqslant 0}$ associe la suite $T(u) = (u_{n+1})_{n \geqslant 0}$.

Étant donné un polynôme :

$$P = a_0 X^p - \sum_{i=1}^{p} a_i X^{p-i}, \qquad (p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}) \tag{1}$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_p$ appartiennent à K, on note P(T) l'endomorphisme :

$$P(T) = a_0 T^p - \sum_{i=1}^{p} a_i T^{p-i}, \tag{2}$$

et on note E(P) le sous-espace vectoriel de $K^{\mathbb{N}}$ constitué des suites $u = (u_n)$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_0 u_{n+p} - \sum_{i=1}^{p} a_i u_{n+p-i} = 0. \tag{3}$$

Dans ce problème, on se propose d'étudier les suites u satisfaisant à une relation de récurrence de ce type : dans la partie I, on utilise des polynômes; dans la partie II, on exploite le calcul matriciel; dans la partie III, on introduit des séries entières.

I. Polynôme minimal associé à une suite.

Soit $u = (u_n)_{n \geqslant 0}$ un élément non nul de $K^{\mathbb{N}}$.

1° Soit P un élément de K[X]. Montrer que u appartient à E(P) si et seulement si $P(T)(u) = 0$.

2° On suppose qu'il existe un polynôme P de degré $p \geqslant 1$ tel que u appartient à E(P).

a. On note $\mathfrak{J}_u$ l'ensemble des polynômes Q tels que u appartienne à E(Q). Montrer que $\mathfrak{J}_u$ est un idéal de K[X], non réduit à $\{0\}$ et distinct de K[X].

b. Prouver qu'il existe un polynôme normalisé et un seul, noté π_u, appartenant à $\mathfrak{J}_u$ et tel que, pour tout élément Q de $\mathfrak{J}_u$, $d^\circ\pi_u \leqslant d^\circ Q$.

Montrer en outre que tout élément Q de $\mathfrak{J}_u$ est un multiple de π_u.

Dans toute la suite, on dira que π_u est le polynôme minimal associé à u.

3° Soit P un polynôme de degré $p \geqslant 1$. Pour tout élément u de E(P), et pour tout entier naturel n, soit U_n l'élément de K^p défini par $U_n = (u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+p-1})$.

On note F(u) le sous-espace vectoriel de K^p engendré par les vecteurs U_n, où n parcourt $\mathbb{N}$.

Tournez la page S. V. P.

a. Prouver que l'application linéaire φ de E (P) dans K^p définie par $\varphi(u) = U_0$ est un isomorphisme. En déduire la dimension de E (P). Calculer $\varphi(T(u))$. Dans la suite de cette question, on suppose donné un élément u non nul de E (P).

b. Prouver qu'il existe un entier k appartenant à $[1, p]$ tel que la famille $B_u = (U_0, U_1, \ldots U_{k-1})$ soit libre et que la famille $(U_0, U_1, \ldots, U_k)$ soit liée. Prouver que B_u est une base de F (u).

c. On écrit alors $U_k = \sum_{i=1}^{k} b_i U_{k-i}$. Déterminer le polynôme minimal π_u associé à u, et comparer en particulier le degré de π_u et la dimension de F (u).

d. Soit en particulier $e_p = (0, \ldots, 0,1)$ et z l'unique élément de E (P) tel que $\varphi(z) = e_p$. Prouver que $(Z_0, Z_1, \ldots, Z_{p-1})$ est une base de F (z), déterminer le polynôme minimal π_z, et prouver que $(z, T(z), \ldots, T^{p-1}(z))$ est une base de E (P).

4° *Étude d'exemples.*

a. On suppose que $K = \mathbb{R}$ et on prend $P = X^3 + X^2 + X + 1$.

Décomposer P en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$.

Caractériser, à partir de $U_0 = \varphi(u)$, les éléments u de E (P) tels que $d^\circ\pi_u = 1$, puis ceux tels que $d^\circ\pi_u = 2$.

Dans chacun de ces cas, expliciter la base B_u de F (u).

b. On suppose que $K = \mathbb{C}$ et on prend $P = X^3 + iX^2 + X + i$.

Caractériser les éléments u de E (P) tels que $\pi_u = X^2 + 1$, et ceux tels que $\pi_u = (X + i)^2$. Dans chacun de ces cas, expliciter la base B_u de F (u).

5° *Passage à un sous-corps de K.*

Soient K' un sous-corps de K, P un élément de K [X] de degré $p \geqslant 1$, u un élément non nul de E (P), et π_u le polynôme minimal associé à u.

a. Montrer que si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n appartient à K', alors π_u appartient à K' [X], c'est-à-dire est à coefficients dans K' (on pourra utiliser la base B_u de F (u)).

b. On suppose que $K = \mathbb{C}$ et $K' = \mathbb{R}$, on écrit $P = A + iB$, où A et B appartiennent à R [X] et sont non nuls, et on note D le P.G.C.D. de A et B et d le degré de D.

Si $d \geqslant 1$, prouver que $E(P) \cap \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est constitué des éléments u de E (D) tels que $u_0, \ldots, u_{d-1}$ soient réels. Étudier le cas où $d = 0$.

c. Exemple : on prend l'exemple 3° *b.* avec $K' = \mathbb{R}$. Déterminer les éléments u de E (P) $\cap \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et, lorsque u est non nul, préciser π_u.

II. Matrice associée à un polynôme.

On note $\mathfrak{M}_p(K)$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre p à éléments dans K.

Soit P un élément de K [X] normalisé, de degré $p \geqslant 1$, écrit sous la forme (1), où $a_0 = 1$.

On appelle matrice associée à P l'élément M de $\mathfrak{M}_p(K)$ défini par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ a_p & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

Tournez la page S. V. P.

Si $p = 1$, on convient que $M_p = (a_1)$. On désigne par f l'endomorphisme de K^p défini par M.

1° Prouver que, pour tout élément u de E (P) et pour tout entier naturel n, $U_n = f^n(U_0)$.

2° Montrer que $(e_p, f(e_p), \ldots, f^{p-1}(e_p))$ est une base de K^p.

3° Soit Q un élément de K [X]. Montrer que $Q(f) = 0$ si et seulement si $Q(f)(e_p) = 0$. En déduire que $P(f) = 0$ et que tout polynôme Q tel que $Q(f) = 0$ est un multiple de P.

(On pourra utiliser φ.)

4° Calculer le polynôme caractéristique de f.

5° Soit u un élément non nul de E (P).

a. Montrer que F (u) est stable par f.

b. Soit g l'endomorphisme de F (u) induit par f. Déterminer la matrice de g dans la base B_u à l'aide des coefficients du polynôme minimal π_u; en déduire le polynôme caractéristique de g.

6° On suppose que $K = C$; et on munit l'espace C^p de la norme qui, à tout élément $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de C^p, associe $||x||_\infty = \sup_{1 \leqslant j \leqslant p} |x_j|$; on note $||h||$ la norme d'un endomorphisme h de C^p.

a. Calculer les composantes $(y_1, \ldots, y_p)$ de $y = f(x)$.

b. En déduire que :

(4) $$||f|| \leqslant \rho \text{ où } \rho = \sup(1, |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_p|).$$

c. Soit u un élément de E (P). Déterminer un nombre réel $\beta \geqslant 0$ tel que, pour tout entier naturel n,

(5) $$|u_n| \leqslant \beta \rho^n.$$

III. Série entière associée à une suite.

On note C_m [X] l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré *strictement* inférieur à m, où $m \geqslant 1$.

Soit P un élément de C [X] normalisé de degré $p \geqslant 1$, écrit sous la forme (1).

On pose $\tilde{P} = 1 - \sum_{i=1}^{p} a_i X^i$. À tout élément $u = (u_n)$ de $C^{\mathbb{N}}$ on associe la série entière $\sum u_n x^n$.

1° On suppose que u est un élément de E (P).

a. Prouver que le rayon de convergence R de cette série est supérieur ou égal à $\frac{1}{\rho}$.

Pour tout nombre réel x tel que $|x| < \frac{1}{\rho}$, on pose $S_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

b. Prouver que $\tilde{P}.S_u$ est un élément de C_p [X].

c. Prouver que l'application $\psi = u \longmapsto \tilde{P} . S_u$ est un isomorphisme de E (P) sur C_p [X].

d. Soit en particulier $z = (z_n)$ l'unique élément de E (P) tel que $\varphi(z) = e_p$. Préciser l'image par ψ de la base $(z, T(z), \ldots, T^{p-1}(z))$ de E (P).

TOURNER LA PAGE

2° *a.* Indiquer une méthode de calcul de $z = (z_n)$ à l'aide de la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle convenable.

b. En déduire une méthode de calcul de l'unique élément $u = (u_n)$ de E (P) tel que : $u_0 = \alpha_0, \ldots, u_{p-1} = \alpha_{p-1}$ où $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1})$ est un élément de $\mathbb{C}^p$.

c. On reprend l'exemple *a.* du I.4°.

Expliciter z, T (z) et $T^2(z)$. Calculer $u = (u_n)$ lorsque $U_0 = (1, 0, 0)$.

3° Soit $u = (u_n)$ une suite de nombres complexes telle que le rayon de convergence R de la série $\sum u_n x^n$ soit strictement positif, et S_u la somme de cette série. On suppose que l'ensemble des entiers n tels que $u_n \neq 0$ est infini et qu'il existe un élément B de C [X] de degré $p \geqslant 1$ tel que B (0) = 1 et que $A = B . S_u$ appartienne à C_{p+q} [X], où $q \geqslant 0$.

a. Montrer qu'on peut supposer en outre que A et B sont premiers entre eux, ce que l'on fera dans toute la suite. Prouver alors que B ne s'annule pas sur] − R, R[et que la couple (A, B) est unique.

b. Prouver qu'il existe un polynôme normalisé P de degré p et un seul tel que $\tilde{P} = B$. Montrer que $v = T^q(u)$ est un élément non nul de E (P) et que :

$$S_u(x) = u_0 + u_1 x \ldots + u_{q-1} x^{q-1} + x^q S_v(x), \quad \text{si } q \geqslant 1 .$$

c. Soient π_v le polynôme minimal associé à v et k son degré. Montrer que $C = \tilde{\pi}_v S_v$ appartient à C_k [X], que C et $\tilde{\pi}_v$ sont premiers entre eux, et que $\tilde{\pi}_v$ ne s'annule pas sur]− R,R[. En déduire que $B = \tilde{\pi}_v$ et exprimer A à l'aide de C. Prouver en particulier que, si $q = 0$, alors A = C.

d. On suppose en outre que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à un sous-corps K′ de C. Prouver que A et B appartiennent à K′ [X].

• • •